С.А.Алфёров

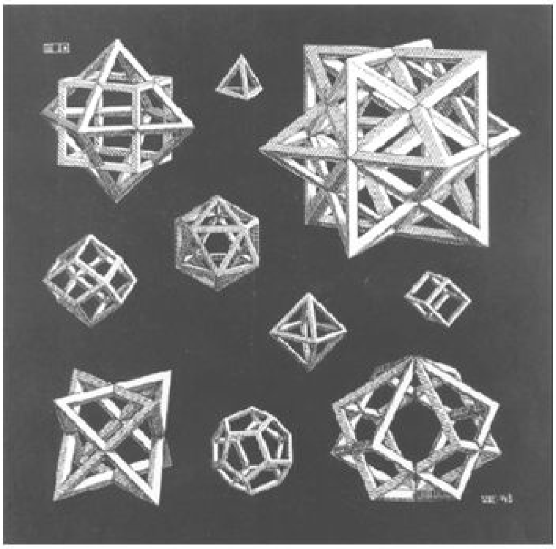
Коллаж правильных тел

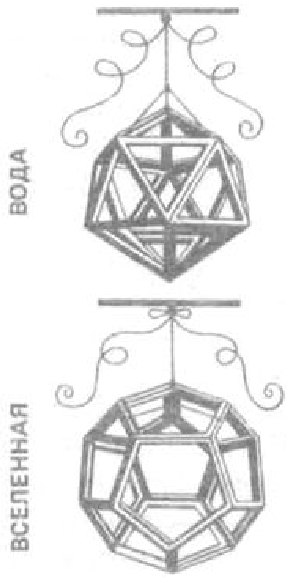
Книги стоят в этом зале в один ряд, закрывая стены. Вот - толстые, вот - тонкие. Рука потянулась и взяла со стеллажа тонкую - Карл Левитин "Геометрическая рапсодия[1]". Быстро пролистываю ее… Во, как: в ней чуть ли не все знаменитые гравюры Маурица Эсхера, гравюры визуальных иллюзий, отражающих свойства реального мира. А вот и о золотой пропорции, а вот и изречения. Надо же, многие мне знакомы, я их встречал в публикациях о Золотой пропорции.

Листаю книгу дальше. Она действительно стоит того, чтобы перечитать ее повнимательнее. Если архитектура (в самом широком смысле) - это музыка в камне, то геометрия, безусловно, ее рапсодия...

Глаза выхватывают на страницах гравюры правильных многогранников - знаменитых пяти Платоновых тел. И, конечно же, я зачитался там, где Карл Левитин пишет об интересных фактах этих многогранников.

«…И наконец, главный вопрос: почему Платоновых тел (это математический термин) именно пять? Постарайтесь придумать шестое: выпуклый многогранник, каждая грань которого — один и тот же правильный многоугольник, то есть фигура с равными сторонами и равными углами между ними. Когда попытки ваши кончатся безрезультатно, попробуйте найти способ доказать себе и другим известное любому математику утверждение Евклида: существует только пять правильных выпуклых многогранников. И вне зависимости от успеха этого предприятия вы, вероятно, с большим пониманием, чем прежде, отнесетесь к словам профессора Литлвуда. И вне сомнения, с большим, чем в первый раз, интересом станете рассматривать гравюру Эсхера «Звезды», на которой среди прочих тел легко найти всю нашу «великолепную пятерку».

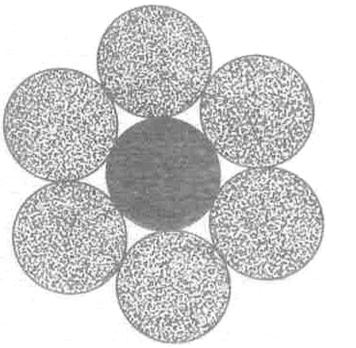
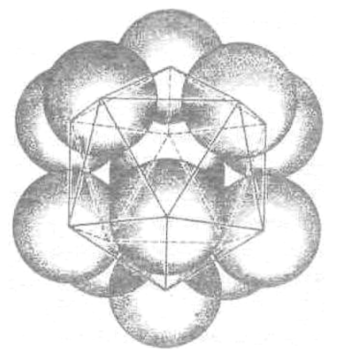




Вглядитесь повнимательнее в эту древнейшую игральную кость. К каждой вершине сбегаются пять треугольников, свободные стороны которых образуют уже знакомый нам правильный пятиугольник. Если же соединить между собой любые два противоположные ребра икосаэдра, то получится прямоугольник, тоже имеющий прямое отношение к «божественной» пропорции, — его большая сторона так относится к меньшей, как сумма сторон — к большей. И именно икосаэдр связан с математической знаменитостью — проблемой «целующихся сфер», которая возникла в споре Исаака Ньютона с оксфордским астрономом Дэвидом Грегори (4).

---

[1] ***Рапсодия*** - одночастное музыкальное произведение, имеющее в основе народную музыку, часто, эпического содержания.

Наконец, в самые последние годы это звучное греческое слово вновь замелькало в научных статьях: выяснилось, что структура кристаллического бора — идеальный икосаэдр. И даже вирусы, которые раньше так и назывались «сферическими» — например, вирус полиомиелита, — и то, как удалось обнаружить, имеют форму икосаэдра.

…Послушайте Джона Кендрью:

«Вы можете спросить: а почему обязательно правильный многогранник? И почему именно икосаэдр? По-видимому, тут все дело в экономии — экономии генетической информации. Вирусная частица должна весь обмен клетки-хозяина перевернуть вверх дном; она должна заставить зараженную клетку синтезировать многочисленные ферменты и другие молекулы, необходимые для синтеза новых вирусных частиц. Все эти ферменты должны быть закодированы в вирусной нуклеиновой кислоте. Но количество ее ограничено. Поэтому для кодирования белков собственной оболочки в нуклеиновой кислоте вируса оставлено совсем мало места. Что же делает вирус? Он просто использует много раз один и тот же участок нуклеиновой кислоты для синтеза большого числа стандартных молекул — строительных белков, объединяющихся в процессе автосборки вирусной частицы. В результате достигается максимальная экономия генетической информации. Остается добавить, что по законам математики для построения наиболее экономичным способом замкнутой оболочки из одинаковых элементов нужно сложить из них икосаэдр, который мы наблюдаем у вирусов».

Так «решают» вирусы сложнейшую (ее называют «изопиранной») задачу: найти тело наименьшей поверхности при заданном объеме и притом состоящее из одинаковых и тоже простейших фигур. Вирусы, мельчайшие из организмов, настолько простые, что до сих пор неясно — относить их к живой или неживой природе, — эти самые вирусы справились с геометрической проблемой, потребовавшей у людей более двух тысячелетий! Все так называемые «сферические вирусы», в том числе такой страшный, как вирус полиомиелита, представляют собой икосаэдры, а не сферы, как думали раньше.

Эта внушительная и в то же время удивительно целесообразная конструкция, состоящая из двадцати простейших одинаковых деталей — правильных треугольников — и заключающая внутри себя наибольший возможный объем, вновь наталкивает на мысль об изначальной простоте Природы. Она строит все свое богатство и разнообразие из простейших блоков. Недаром же Джон Кендрью назвал вирусы «живой архитектурой». В свете последних научных достижений платоновский 4-х-элементный мир не кажется больше таким уж абсурдным. И вслед за Адельбертом Шамиссо, немецким поэтом и ученым, хочется повторить полушутливые слова: «Во мгле веков перед нашим взором мелькнула истина. Она, как теорема Пифагора, до наших дней еще верна.»

«Эйлер... не проглядел ничего в современной ему математике, хотя последние 17 лет своей жизни он был совершенно слепым», — писал один известный историк математики. Не проглядел Эйлер и проблемы многогранников. Если бы Евклид и в самом деле хотел написать многотомное сочинение о платоновых телах, он все равно не мог бы сделать этого, не зная формулы Эйлера, с которой мы уже встречались. А ведь она даже проще, чем знаменитый «Понсасинорум» — «Мост для ослов», не преодолев который, нельзя, по мнению Евклида, считать себя разумным человеком (перейдите ради самоутверждения через него и вы: докажете, что углы при основании равнобедренного треугольника равны)!

Послушайте:

«В любом простом выпуклом многограннике число вершин плюс число граней и минус число ребер равно двум».
Проверьте (еще раз):

на тетраэдре, кубе, октаэдре, на любой фигуре, которую способно измыслить ваше воображение, — с прямо-или криволинейными ребрами, с какими угодно гранями (только без «дыр» — это и значит «простой» многогранник),

Убедитесь (окончательно):

формула Эйлера В+Г-Р=2 справедлива в любом случае.

Эта прославленная формула не связана, как мы имели случай увериться, ни с расстояниями, ни с углами, она предельно наглядна. Она буквально видна в прозрачном воздухе геометрического сада. Но эта простота и наглядность — отражение фундаментальных свойств нашего трехмерного пространства. Именно из-за своей фундаментальности формула эта стала основой для двух математических дисциплин — топологии и теории графов.

…Правильный многогранник тем и правилен, что каждая грань его правильный ***p***-угольник и в каждой вершине сходится одно и то же число ***q*** таких граней. (Математики обозначают это обстоятельство символом Шлефли — *{p, q}*.) Отсюда следует, что число всех ребер, которые составляют «каркас» Платонова тела (иными словами, число планок, которые пришлось заготовить Леонардо да Винчи для каждой из своих моделей), можно подсчитать двояким путем. Оно равно произведению числа всех вершин на число сходящихся к каждой из них ребер ***q***, поделенному пополам, — ведь при таком подсчете мы каждое ребро учитываем дважды, по одному разу каждый его конец. Но, с другой стороны, те же ребра можно пересчитать Платонову телу и по-другому, помножив число его граней на число сторон каждой грани ***p*** и опять — по той же причине — разделив эту цифру на два. Если подставить теперь полученные соотношения в формулу Эйлера и несколько поразмыслить над получившимся результатом, то мы как раз и докажем утверждение Евклида: Платоновыми телами могут быть лишь многогранники, символы Шлефли которых — {3,3}; {4,3}; {3,4}; {5,3} и {3,5}. Итого—пять!

…Евклидову плоскость можно покрыть квадратами так, чтобы в каждой вершине их сходилось по четыре, — это и будет мозаика {4,4}. Но стоит нам захотеть объединить квадраты таким образом, чтобы к каждой вершине прилегало лишь три из них, как фигура замкнется в пространстве и мы получим куб {4,3}. Точно так же плоскость удается заполнить правильными треугольниками, собранными по шестеркам в каждой вершине, — мозаика {3,6}. Но если надо, чтобы вершину окружали три, четыре или пять таких треугольников, то мы опять получим замкнутые пространственные тела — уже знакомые нам тетраэдр {3,3}, октаэдр {3,4} и икосаэдр {3,5}.

Размышляя об этих превращениях, мы постигаем простейшие понятия топологии. И вместе с тем становится ясным, насколько общи ее законы, насколько универсален характер изучаемых ею зависимостей.

Кристаллы в виде кубов, тетраэдров и октаэдров, вирусы, ныне обретшие икосаэдрическую форму, — все это, очевидно, далеко не последние шаги наглядных математических представлений в глубины нашего мира.

Впрочем, почему только «в глубины»? Почему речь все время идет лишь о свойствах вещества? Зачем забывать о додекаэдре — платоновском символе Вселенной, «пятой сущности» алхимиков? Если справедлив платоновский принцип: «геометрия приближает разум к истине», то он верен не только в микро-, но и в макрокосмосе. Числа все-таки должны править миром — описывать законы движения Вселенной.

…У подножия старых военных памятников лежат обычно пушечные ядра в виде пирамиды — верхнее ядро покоится на четырех других, те, в свою очередь, на девяти ниже расположенных ядрах и т. д. Каждое попавшее внутрь пирамиды ядро касается двенадцати других — четырех в своем слое, четырех внизу и вверху. Это так называемая кубическая плотная упаковка, описанная Кеплером. Если положить пирамиду набок, то получится другой способ упаковки ядер-сфер, но плотность ее та же самая (точное ее значение 0,7408). Есть и еще варианты, но ни один не гарантирует самое компактное расположение.

(В том числе и тот, «икосаэдрический», все из того же спора Ньютона с Грегори.).

Вопрос об упаковках — не праздный и не абстрактный. Он связан со строением вещества, его прочностью…

«Земляника растет и под крапивой», — подметил Шекспир. Геометрическая мысль плодоносит и в худших условиях. «Я сдавливал свежий горох в одном и том же котле с силой в 1600, 800 и 400 фунтов, — писал еще в 1727 году Стефан Хейлс в своей «Статистике растений», — при этих опытах горох расплющивался, но его уровень не повышался, так как под действием большого веса масса гороха заполняла промежутки между горошинами, которые превращались в прелестные маленькие додекаэдры». Через двести с лишним лет, в 1939 году, опыт этот повторили два ботаника – Д.Марвин и Э.Мацке. Они заменили горошины свинцовыми пулями и увеличили давление в 10 раз. Получились неправильные 14-гранные тела. Грани были по преимуществу 5-угольными, хотя среди них встречались и 4-угольные, и 6-угольные. Далее было обнаружено, что внутренние клетки растительных тканей тоже имеют в среднем 14 граней. Исследовали под микроскопом пену, состоящую из 2000 пузырьков. Те 600 из них, что расположились в центре, имели в среднем по 13,7 касания с соседями, но чаще всего они превращались в 13-гранник, составленный из 1-го 4-угольника, 2-х 6-угольников и 10-и 5-угольников. В 1959 году Джон Бернал изящнейшим образом показал, что 5-угольная грань действительно имеет преимущество перед другими. Он изготовил из пластилина массу одинаковых шариков, вывалял их в меловой пудре, а затем спрессовал в сплошной ком. У получившихся фигур в среднем было 13,3 грани, в большинстве своем 5-угольники.»

Прервемся на минутку в чтении книги Карла Левитина. Возьмите небольшие надувные шарики одинакового размера, штук 10÷15. Их веревочки свяжите небольшими колечками прямо у основания шариков. Пропустите через них общую веревку, перехлестните концы узлом и стяните. Шарики расположатся в пространстве каким-то образом. И только при их количестве в 12 штук они образуют равномерную и красивую группу (упаковку). Глядя на нее с любой стороны, вы будете видеть «цветок» из 5 лепестков-шариков с 6-ым в середине.

Эти 12 шариков, обжимая 13-й в центре, сформируют додекаэдр. Они и сами станут додекаэдрами среди множества других обжимающих их шариков. Правильные 5-угольники единственные способны выстроиться без зазоров вокруг окружности (хотя и не могут полностью заполнить плоскость, как 6-угольники). Образованный такими гранями додекаэдр полностью, без зазоров формирует пространство. Он и куб, единственные, могут сформировать равномерную решетку пространства. Так какая у нас структура пространства? Платон сказал, что за Вселенную отвечает додекаэдр…

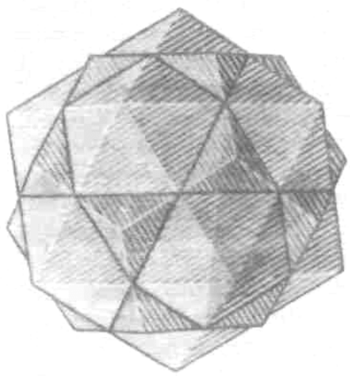
«…Трехмерные пространственные соты с числом углов граней единичной ячейки где-то между 5 и 6 помогли найти точную цифру, а именно 0,7797 (ее получил К.Роджерс в 1958 году), выше которой не может быть плотность ни одной упаковки. И в тоже время очевидно, что любая меньшая плотность получается как бы сама собой, за счет случайных величин. Об этом и говорит эксперимент Осборна Рейнольдса на морском берегу: путешествуя по мокрому пляжу, мы изменяем упаковку песчинок, делая ее менее плотной, и тогда вода заполняет поры, и отпечаток ноги «сохнет», светлеет. Под ударами волн или дождевых капель песчинки располагаются самым плотным из возможных способов. Теперь уже любое воздействие извне, особенно столь грубое, как давление ноги знаменитого ученого, не только не в силах уплотнить песок, но неизбежно разрушает «наиплотнейшее» расположение песчинок, и потому вода засасывается в поры между ними. Рейнольдс, разобравшись в сути явления, не советовал доверять продавцу, который, насыпав зерно в меру, начинает ревностно уминать его, как бы демонстрируя свое бескорыстие. На самом же деле при умелом уминании объем зерна может возрасти процентов на десять, а то и больше. …После определенного воздействия песчинки приходят в состояние наиплотнейшего расположения и грунт приобретает все свойства твердого тела. Именно поэтому до сих пор прочно стоит «твердыня власти роковой» - Петропавловская крепость, первое большое архитектурное сооружение, построенное на песке — и на геометрической идее, заложенной в ее фундамент.

Правильные многогранники существовали на Земле задолго до появления на ней человека — кубы поваренной соли, тетраэдры сурьмянистого сернокислого натрия, октаэдры хромовых квасцов, икосаэдры бора и додекаэдры радиолярий, микроскопических морских организмов... Но только геометр усмотрел в них порядок и систему задолго до того, как физик проник в тайну строения вещества. Геометрия с ее прозрачной логикой, с четкостью ее построений позволяет увидеть первоосновы вещей.

Именно увидеть! «Радость видеть и понимать есть самый прекрасный дар природы», — говорил Эйнштейн...

«Правильных выпуклых многогранников вызывающе мало», — заметил однажды Льюис Кэрролл. Но и этот весьма скромный по численности отряд, великолепная пятерка, сумел глубоко пробиться в самые глубины различных наук. Известный советский геолог профессор Б. Л. Личков, друг и сотрудник академика В. И. Вернадского, написал научный труд «К основам современной теории Земли». Он развил в нем ту точку зрения, весьма популярную среди космологов, что планета наша сформировалась из скопления астероидов. Вначале она отнюдь не напоминала шар — это было некое угловатое образование, несущееся в космосе. Но время и законы физики постепенно превращали Землю в правильные геометрические тела, поскольку именно они обладают особыми геометрическими свойствами, удобными для подобной эволюции. Переходной формой к нынешнему геоиду мог быть, по мнению профессора Личкова, додекаэдр, и части его граней и до сих пор должны сохраниться в теле планеты. По другим соображениям, приведенным в его книге, Земля должна была напоминать октаэдр, и тогда геологам следует, по Личкову, искать именно эти огромные грани.

…И, наконец, снова Платон, его диалог «Федон»: «Земля, если взглянуть на нее сверху, похожа на мяч, сшитый из двенадцати кусков кожи».

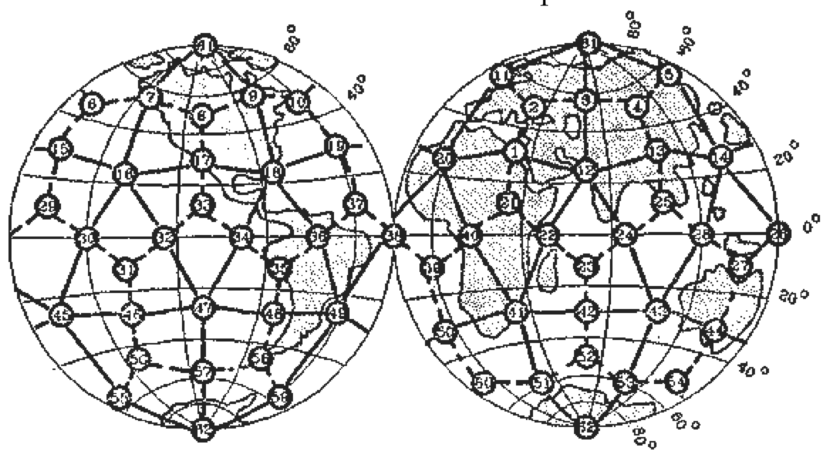


Один лишь икосаэдр остался не вовлеченным в эти гео-метрические рассуждения, но лишь до недавнего времени. В 1973 году сразу трое ученых — искусствовед Н. В. Гончаров, инженер-электронщик В. А. Макаров и инженер-строитель В. С. Морозов — выдвинули совместную гипотезу, которую они назвали додекаэдро-икосаэдровой.

Они обратили внимание на любопытное совпадение: Мохенджо-Даро, очаг древнейшей индийской культуры, и остров Пасхи, где тоже в отдаленные времена существовала самобытная цивилизация, расположены на концах оси, проходящей через центр Земли. Но несмотря на такую диаметральную географическую противоположность, между ними наблюдается удивительное лингвистическое единство: венгерский ученый Хевеши считает, что среди иероглифов острова Пасхи и Мохенджо-Даро около сотни одинаковых знаков. Вдобавок в знаменитых табличках ронго-ронго упоминается о большом архипелаге, который опустился под воду в районе острова Пасхи, а в Мохенджо-Даро в древности были сильные колебания почвы.

Эти не лишенные интереса (хотя и недостаточно проверенные) факты явились толчком к дальнейшему «обшариванию» планеты в поисках новых знаменательных совпадений. В поле зрения трех молодых исследователей попали египетские пирамиды. Название древней столицы Египта — Мемфиса, где они расположены, переводится как «Середина мира». От Гизы, района пирамид, до Мохенджо-Даро шестнадцать географических градусов, а от Мохенджо-Даро до Северного полюса — ровно вдвое больше. Получается, что пирамиды и в самом деле находятся если не в середине мира, то в центре гигантского равностороннего треугольника.

Следующий шаг на пути авторов додекаэдро-икосаэдровой гипотезы строения Земли был естествен и прост: продолжить стороны гигантского треугольника вдоль земного шара. Мозаика, покрывшая глобус в результате этой работы, состояла ровно из двадцати правильных треугольников. Иными словами, она представляла собою икосаэдр. Соединив середины его граней между собой, Гончаров, Морозов и Макаров получили, естественно, додекаэдр. И тут выяснилось, что вдоль ребер двух замечательных фигур происходят на Земле удивительные явления. Океанические подводные хребты и разломы земной коры расположились строго параллельно ребрам, а часто и просто вдоль них. Впрочем, это обстоятельство мало удивило авторов гипотезы: они были уже знакомы с новым научным направлением, так называемой тектоникой плит. Ее сторонники утверждают, что земная кора состоит из огромных плит, стыки между которыми они называют «швами на бейсбольном мяче планеты». «Земля, если взглянуть на нее сверху...» Откуда мог знать Платон, к каким выводам придет геология через две с половиной тысячи лет после его смерти?



…Как ни соблазнительно представлять себе земную сферу в виде правильного многогранника, Платонова тела, и какими бы дружескими чувствами к Платону мы ни пылали, истина все-таки дороже. Да, многие залежи полезных ископаемых тянутся вдоль ребер икосаэдро-додекаэдровой сетки. Да, еще более удивительные вещи происходят в местах пересечения этих ребер — тут располагаются и очаги древнейших культур и цивилизаций — Перу, Северная Монголия, Таити, Обская культура, Камбоджа—Вьетнам, Ирландия, где есть памятники постарше египетских пирамид; районы максимума солнечной активности; максимумы и минимумы атмосферного давления; гигантские завихрения течений Мирового океана; шотландское озеро Лох-Несс с знаменитой Несси, скорее всего отсутствующей в нем; остров Сахалин, где обычные растения вытягиваются до невероятной длины,— да, все это странным образом попадает в вершины додекаэдра и икосаэдра. Но и эти и многие другие совпадения (среди них особенно поразительно, что «Бермудский дьявольский треугольник» и «море Дьявола» южнее Японии, где загадочным образом пропадают корабли и самолеты, не успев подать сигнал «SOS», — оба эти проклинаемые мореходами и авиаторами района океана лежат точно в центрах пятиугольных граней додекаэдра) еще не дают оснований для того, чтобы считать гипотезу Гончарова—Макарова—Морозова научной теорией. Строгих ее доказательств пока нет, и будут ли они — неизвестно.»

Немецкий астроном Иоганн Кеплер (1571 - 1630г) открыл законы движения планет («Гармония мира» 1619г.). В трактате «Космографическая тайна» (1597г.) он достаточно точно для своего времени рассчитал орбиты известных тогда 6 планет солнечной системы, расположив их между 5 Платоновыми телами. Он расположил орбиты по сферам, каждая из которых оказалась описанной вокруг одного Платонова тела и вписанной в другое. Например, вокруг сферы Земли описывался додекаэдр, а в нее вписывался икосаэдр… Смотрите, какая матрёшка из Платоновых тел…

Позднее в своем главном труде «Гармония мира» он поправил первое свое приближение в образе сфер к истинным параметрам орбит. В 1-м законе он и сформулировал, что каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого располагается солнце. Но тот «эстетический образ» был действительно предтечей, по признанию Кеплера, для формулирования его законов. Через красивое приближение он пришел к красивому 3-му закону: *квадраты* времен обращения планет вокруг солнца относятся как *кубы* их средних расстояний от солнца, $(T_1/T_2)^2=(\text{ср.}R_1/\text{ср.}R_2)^3$.

Обобщая свойства правильных многогранников, он открыл дополнительный класс *звездчатых многогранников*. Первое из данного класса тело, когда один тетраэдр проходит вершинами через грани другого, обнаружил еще Лука Пачоли и назвал такую звезду «продолженным октаэдром»; Кеплер, обнаружив ее, назвал «восьмиугольная звезда». На основе додекаэдра Кеплер открыл еще две звезды: малый и большой звездчатые додекаэдры. Оставшиеся две звезды на основе икосаэдра открыл в 1809г французский математик Луи Пуансо (см. ниже).

Кеплер восхищался гармонией правильных многогранников, как и гармонией Золотой пропорции: «В геометрии существует два сокровища - теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».

И еще с Архимеда известны так называемые усеченные многогранники, когда, как бы отрезая вершины, получают фигуру с равными ребрами, но теперь с двумя типами граней: на месте вершины образуется грань с углами (или сторонами) по числу сходившихся ребер, а существовавшая грань становится с удвоенным числом строн. Так *усеченный икосаэдр* (а такое название ему дал опять же Кеплер) состоит из 12 пятиугольников (на месте вершин) и 20 шестиугольников («удвоенных» граней). Эта красивая фигура запечатлена Леонардо да Винчи в «Божественной пропорции» Пачоли. По выкройке этой фигуры шьют сейчас мячи. А вообще сейчаснасчитывается 14 «*неправильных многогранников*» Архимеда.

Мне кажется, что есть смысл привести обобщающую таблицу пяти Платоновых тел с небольшими комментариями.

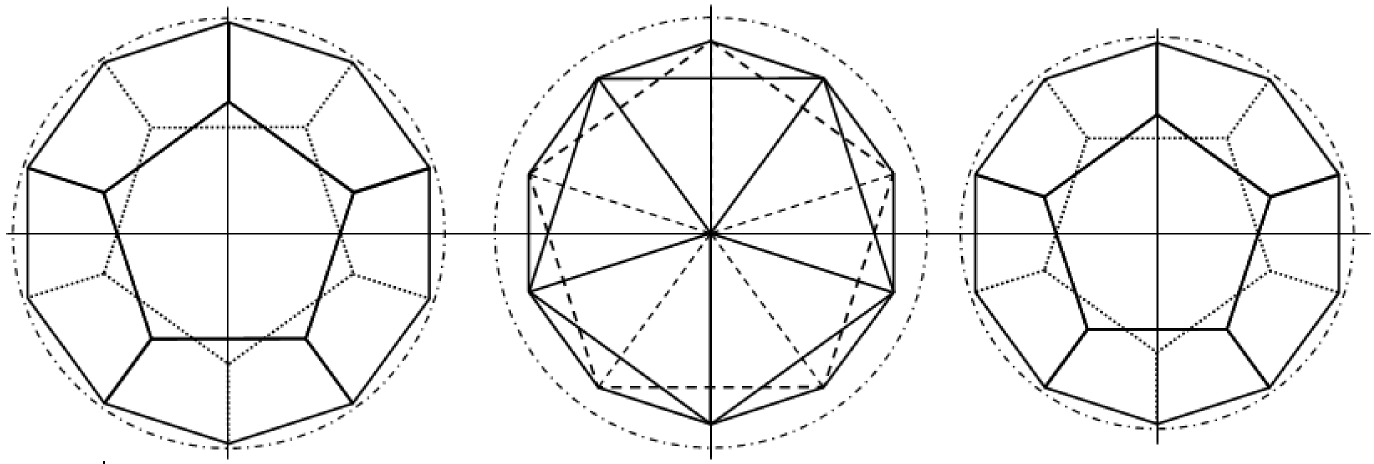
	Символы Платона	Формула Шлефли (углы на грани, углы в вершине)	Грани (Г)	Вершины (В)	Ребра (Р)	Г+В-Р
Тетраэдр	Огонь	(3, 3)	4	4	6	2
Гексаэдр	Земля	(4, 3)	6	8	12	2
Октаэдр	Воздух	(3, 4)	8	6	12	2
Додекаэдр	Вселенная	(5, 3)	12	20	30	2
Икосаэдр	Вода	(3, 5)	20	12	30	2

Правильный многогранник - выпуклое тело (пространственная фигура) с одинаковым количеством ребер (углов) в вершине, образованное по поверхности одинаковыми равносторонними (равноугольными) многоугольниками. Правильный многогранник имеет для себя один символ Шлефли; в этом проявляется его пространственная изотропность (одинаковая «вписанность» в шар), поэтому все параметры его: В, Г и Р - четные.

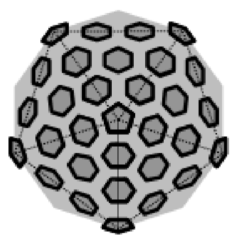
Вы, конечно же, обратили внимание, что в символах Шлефли для правильных многогранников участвуют только цифры 3, 4 и 5, и при этом обязательно присутствует "3". Все правильные многогранники образованы правильными или 3-х-угольниками, или 4-х-угольниками, или 5-ти-угольниками, и в вершине многогранника сходятся или 3 ребра (угла), или 4 ребра, или 5 ребер, но обязательно чего-то одного из них - 3. Три равносторонних треугольника, соединяясь сторонами, формируют тетраэдр, образуют в основании четвёртый; 4 треугольника создают октаэдр на внутреннем квадрате; 5 – строят икосаэдр на внутреннем 5-угольнике; а 6 – образуют плоский 6-угольник (соту). И только куб и додекаэдр образуются - один 3-мя квадратами, другой 3-мя 5-угольниками. (Правильный 5-угольник имеет название «пентагон». Но мне почему то хочется называть его более нежно, например, «пентала»?)

Не знаю, что за неявная связь проявляется в том, что элементарный не иррациональный "комплект" теоремы Пифагора состоит также из чисел 3, 4 и 5: $3^2 + 4^2 = 5^2$. (Есть и такие: $3^2 + 7 = 4^2$ или $2^2 + 5 = 3^2$, - с иррациональными $\sqrt{7}$ и $\sqrt{5}$.)

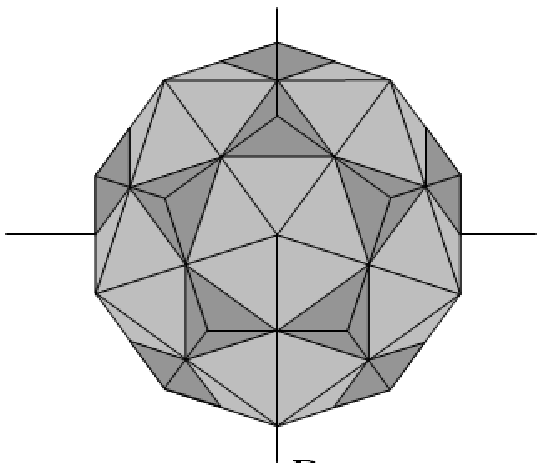
A **B** **C**



($a_д = \tau : \sqrt{3} * a_и \approx 0,68 * a_и$) «В одних сферах» ($a_и$) «Взаимопересекающиеся» ($a_д = \varphi_1 * a_и$)



E



D

А вот и наши знаменитые додекаэдр и икосаэдр. Неправда ли - красивы?

Вы возможно уже знаете, что наша вода имеет структуру и является носителем информации. Так вот, первый элементарный кластер молекул воды (первая макромолекула) имеет форму додекаэдра[2].

Интересно как раз то, что он и икосаэдр взаимны друг другу? То есть одно тело строится, располагаясь своими вершинами в центре граней другого. Естественно, количество граней и вершин у них взаимно меняется. Поэтому-то, если есть золотые пропорции в одном, то будут и в другом.

И заметьте, что только у них в символе Шлефли есть "5": в додекаэдре - 5-ти-угольная грань, в икосаэдре - 5 треугольников, исходя из одной вершины, опираются на внутренний 5-ти-угольник. Наличие этой "пятерки" и порождает золотые пропорции в них.

Отношение длин ребер додекаэдра и икосаэдра при описанные сферах одного радиуса:

$$a_{(и)} = \sqrt{3}/\tau * a_{(д)} \approx 1,47 * a_{(д)}$$

Отношение длин ребер додекаэдра и икосаэдра, имеющих одинаковый объем:

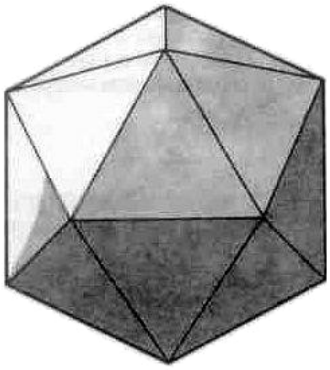
[2] Так изображают информационный кластер. Не могу сказать, какая связь формирует его. Ведь в 20 вер шинах додекаэдра размещаются 6 молекул воды и анион гидроксила: $6xH_2O + OH^- = H_{13}O_7$. То есть додекаэдр кластера образуется 7 молекулами воды с освобождением в общий каркас кластера "связующих" протона и электрона: p^+, e^- (за счет чего, какими силами?).

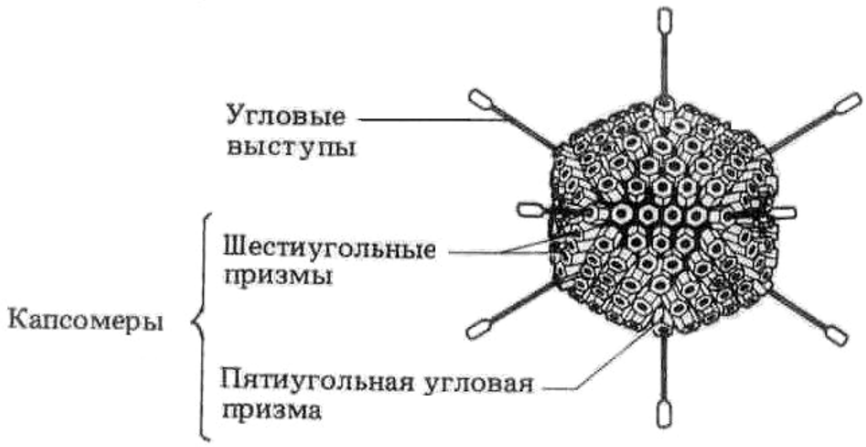
$$a_{(и)} \approx 1{,}52 * a_{(д)}$$

Отношение длин ребер взаимопересекающихся додекаэдра и икосаэдра, имеющих одинаковое расстояние между противоположными (через центр) ребрами:

$$a_{(и)} = \varphi_2 * a_{(д)} \approx 1{,}62 * a_{(д)}$$

Рядом с книгой К. Левитина стояли 3 одинаковых больших тома. Я взял первый из них - Н.Грин, У.Стаут, Д.Тейлор "Биология". Открыв ее, я сразу наткнулся на рисунок, который привожу ниже.





И вот выдержки к рисунку.

"Вирусы - это мельчайшие живые организмы, размеры которых варьируют в пределах примерно от 20 до 300 нм; в среднем они раз в 50 меньше бактерий. Вирусы нельзя увидеть с помощью светового микроскопа (так как их размеры меньше полудлины световой волны), и они проходят через фильтры, которые задерживают бактериальные клетки.

Вирусы находятся на самой границе между живыми и неживыми. Они не способны воспроизводить себя вне клетки-хозяина. Попав внутрь клетки-хозяина, они "выключают" (инактивируют) хозяйскую ДНК и, используя свою собственную ДНК или РНК, дают клетке команду синтезировать новые копии вируса.

Вирусы устроены очень просто. Они состоят из фрагмента генетического материала, либо ДНК, либо РНК, составляющей сердцевину вируса, и окружающей эту сердцевину защитной белковой оболочки, которую называют *капсидом*.

Обычно оболочка вируса бывает построена из идентичных повторяющихся субъединиц - *капсомеров*. Капсомеры вместе образуют капсид - белковую оболочку с высокой степенью симметрии. Эти структуры с высокой степенью симметрии обладают способностью кристаллизоваться.

Головка вируса имеет исходную форму с *икосаэдрической симметрией*. Как видно из рисунка, у аденовируса каждая из 20 граней состоит из нескольких капсомеров. В сумме число капсомеров составляет 252 (240 шестиугольных и 12 пятиугольных по вершинам икосаэдра). У разных вирусов это число варьирует. Так, например, у бактериофага φX174 оно равно 12, у вируса герпеса - 162, у вируса полиомы/папилломы - 42. У всех этих вирусов по 12 пятиугольных капсомеров, при этом у бактериофага шестиугольных капсомеров нет вообще, и образуется структура, которая называется додекаэдром."

Давайте упорядочим информацию о составе капсидов в виде таблички.

<u>Количество капсид у вирусов</u>:			Ребер ×30	Граней ×20	Вершин ×12		Форма вируса
Палочковидный вирус	(02)		(-1)	(+1)	(1)		трубка (6-гранная)
Бактериофаг φX174	12		0	0	1		додекаэдр
Вирус папилломы	42		1	0	1		икосаэдр
… … … … ? … … …	92		2	1	1		икосаэдр
Вирус герпеса	162		3	3	1		икосаэдр
Аденовирус	252		4	6	1		икосаэдр (и далее)
… … … … … … … …	362		5	10	1		
Пойдем дальше:		> 130				6/4	
… … … … … … … …	492		6	15	1		
		> 150				7/5	
… … … … … … … …	642		7	21	1		
		> 170				8/6	
… … … … … … … …	812		8	28	1		
		> 190				9/7	
… … … … … … … …	1002		9	36	1		
	S_i	**d_i**	**i**	**g_i**		**g_i / g_{i-1}**	

! Довольно интересные последовательности… Но сначала – обозначения:

i - количество капсомеров на ребре «вирусного икосаэдра»;
одновременно – порядковый номер комбинации капсомеров в разных капсидах,

S_i - сумма капсомеров в капсиде,

d_i - приращение суммы капсомеров по отношению к предыдущей комбинации,
$d_0 = 10$ (исходное при i=0);

δ_i - приращение приращений (ускорение),
в нашем случае δ=const=20 (d: 10, 30, 50, …, 130, 150, …)

Просмотр развития этих величин позволяет написать для «количества капсомеров на грани»:

$g_i = g_{i-1} + (i-1)$, некий «параллельный» (связанный с i) псевдо-ряд Фибоначчи;

а также $g_i = g_{i-1} \times \dfrac{i}{i-2}$, при i=2 имеем $g_2 = 0 \times \dfrac{2}{0}$!! Неопределенность…

При i=2 формула дает неопределенность,… хотя «работает» при остальных значениях,… и при этом без всякой формулы видно, что должен $g_2=1$… *<u>А может не должен?</u>*

Может быть вируса с такой структурой не существует?! Спросить бы вирусологов… Неужели на уровне вирусов Природа "работает" непосредственно с числами, с геометрией?! Или достаточно того, что, как говорил Гёте, «уточняя» пифагорейцев, «Числа не управляют миром, но показывают, как управляется мир.»… Г.Ф.Гаусс говорит аксиоматично и косвенно: "Математика - царица науки, теория чисел - царица математики"…

Во всяком случае, этот «несуществующий» вирус можно посмотреть на рисунке Е (в главе 10). «Не смешите вирусологов», - скажут нам. Ну что ж. Давайте тогда составим таблицы. (Значения под скобками – под вопросами…)

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
g_i	+1	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45

$g_i - g_{i-1}$	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
g_i / g_{i-1}	(0/..)	(1/-1)	(2/0)	3/1	4/2	5/3	6/4	7/5	8/6	9/7	10/8

Из таблицы видна уже известная функциональная зависимость для g_i: $\boldsymbol{g_i = g_{i-1} + (i-1)}$.

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_i	2	12	42	92	162	252	362	492	642	812	1002	1212
$d_i = S_i - S_{i-1}$	10	30	50	70	90	110	130	150	170	190	210	
δ_i		20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	

Из таблицы можно вывести функциональную зависимость для S_i: $\boldsymbol{S_i = S_{i-1} + (10+20i)}$.

«В лице» g_i и S_i мы имеем рекурсивные функции (помните, зависящие сами от себя?) $\boldsymbol{y=f(y,x)}$. Попробуем составить их уравнения без рекурсивной вложенности.

Составим для суммы капсомеров «S». В данном случае, благодаря определенной структуре величин, исходную табличную зависимость можно привести к виду $\boldsymbol{y=f(x)}$; она «работает» при всех значениях $\boldsymbol{x \equiv i}$: $\boldsymbol{S = d_0 * i + \delta * \sum i + c_0}$.

Здесь: c_0 - константа, $c_0=12$

$\sum i$ - сумма всех «i» от 1 до данного

Выражение в числах для суммы капсомеров: $S_i = 10i + 20 * \sum i + 12$

Очевидно, что «g_i» имеет аналогичную зависимость (по формуле общего вида):

$$g_i = -1 * i + 1 * \sum i + 0 = \sum i - i, \quad \text{то есть} \quad \underline{g_i = \sum (i-1)}$$

Проверим. Из исходной таблицы: $S_i = 30i + 20g_i + 12$,

а подставив $g(i)$, получим то же: $S_i = 30i + 20 * \sum(i-1) + 12 = \underline{10i + 20 * \sum i + 12}$ (!)

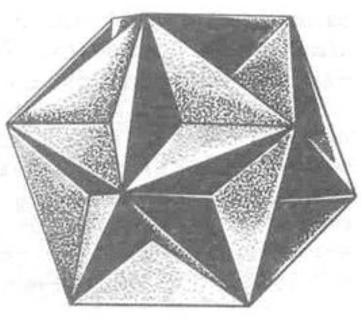
Во всем фантике - красивые рекуррентные соотношения, рекуррентные формулы, связанные с икосаэдром. А причем здесь Золотая пропорция? Общее свойство рекуррентных отношений в том, что они в своих формулах опираются на предыдущие состояния (значения) функции того же вида. В общем виде для стандартной рекуррентной функции это можно выразить так: $f(x) = F\big(f(x-1)\big)$. Для значений Золотой пропорции мы знаем своеобразные рекуррентные соотношения в цепной дроби с «1». Они отличаются от нормальных, и их надо представить по другому, например: $\varphi = f(x)_{x \to \infty} = 1 + \dfrac{1}{f(x)}$.

Здесь рекуррентность (отношение к самому себе) задает одно единственное значение всеми (бесконечно) значениями функции. Формула задает отношение не 2-х соседних значений, а одно число через отношения его бесконечных частей. Это число, имеющее рекуррентные свойства в своих частях и в целом. Золотая пропорция – это рекуррентное число. Это самовложенная и самораскрывающаяся «сущность». В последней формулировке Золотая пропорция несет в себе одновременно признаки фрактальности, то есть подобия в частях.

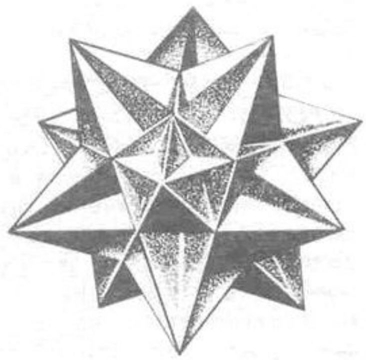
Рекуррентной последовательностью является и ряд Фибоначчи, где каждый последующий член вычисляется из предыдущих. В верхних таблицах, видно, что величины развиваются наподобие ряда Фибоначчи. Но вот настоящий ряд Фибоначчи не имеет конечного (последнего) «ускорения». Этот ряд вложен сам в себя абсолютно. В нем каждый следующий уровень ускорения – просто сдвинутый на шаг (в меньшую сторону) тот же ряд Фибоначчи. Сумму «i» членов ряда Фибоначчи едва ли опишешь рациональной формулой. Каждый член этого ряда присутствует во всех последующих. Члены нарастают экспоненциально. И сумма нарастает экспоненциально: разности между суммами i-тых членов ряда образуют тот же исходный ряд. Получаются как бы суммы сумм… В этом есть признаки «фрактальности» - содержания всего в любом элементе.

Может быть попробовать поискать формулу суммы i-тых членов ряда Фибоначчи? В следующий раз…

Помните «целующиеся сферы» в углах и центре икосаэдра? Так вот, чтобы сферы «целовались» со всеми окружающими их, центральная сфера должна иметь по отношению к периферийным диаметр, равный $(\tau\varphi_2 - 1) \approx 0{,}902$.



Большой _додекаэдр



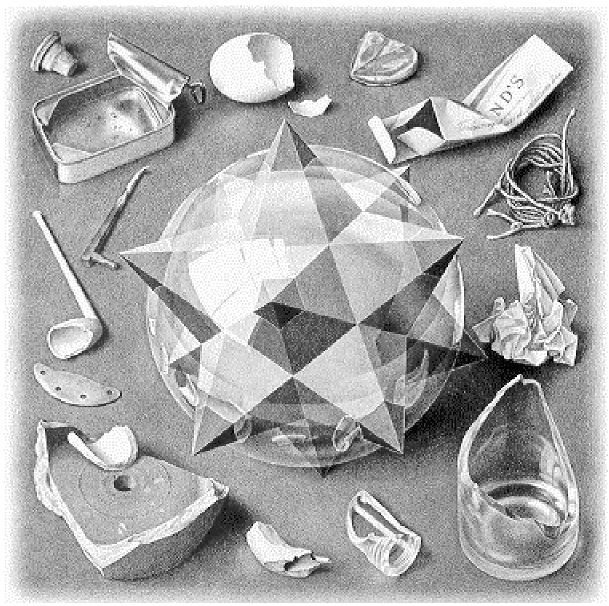
Большой _икосаэдр

Приведем также некоторые соотношения для трех звездчатых многогранников, многогранников Кеплера-Пуансо (обозначения те же: a - ребро, R - радиус описанной окружности, r - радиус вписанной окружности, Θ - угол между гранями):

Большой додекаэдр: $2\varphi_1 R = \tau * a$ $\Theta = 2\varphi°$ $r = R * \sin\psi$

Малый звездчатый додекаэдр: $2R = \tau * a$ $\Theta = 90° + \psi$ $r = R * \sin\psi$

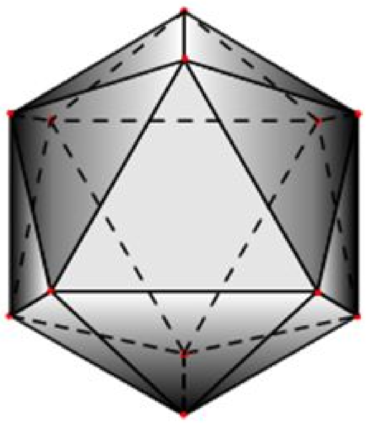
Большой икосаэдр: $2R = \tau * a$

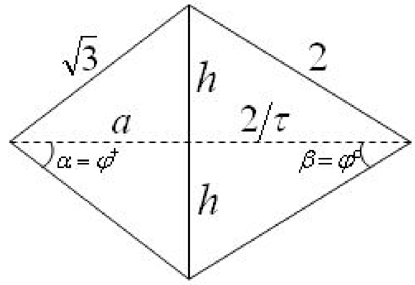


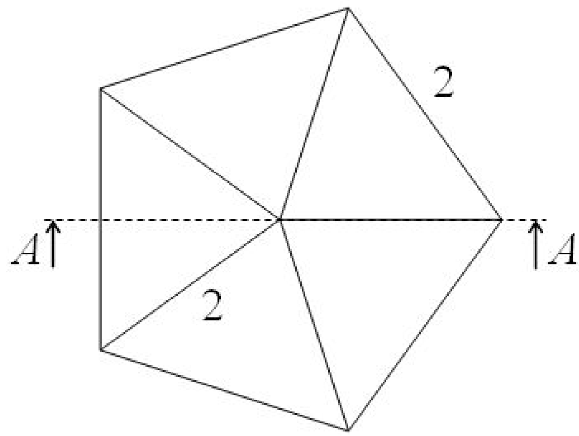
Здесь возникает еще одна тема… Определение ее можно будет дать по ее завершении. А в начале повторим основные условия (правила) правильных тел.

1. Все ребра равны (все грани – равные правильные многогранники)
2. Тело выпукло (углы между гранями направлены острием во вне)
3. Г + В – Р = 2
4. Описанная окружность проходит через все вершины, а вписанная – через центры граней
5. В вершинах сходится одинаковое количество ребер (и граней).

Есть тела, которые удовлетворяют первым 3-м условиям, но не являются правильными по 2-м последним. Посмотрим на одно из них. Самое простое и в чем-то удивительное. Это – тело, поверхность которого образована 10-ю правильными треугольниками. Его можно получить из икосаэдра, убрав «пояс» 10-ти граней и соединив верхнюю и нижнюю 5-ти гранные «шапки». Будем называть его 10-гранник. Вот его поперечное сечение.







Интерес возникает, если спросить:

1. Не сложено ли это тело точно 5-ю тетраэдрами?
2. И чем по этому признаку оно отличается от правильных тел, в частности от икосаэдра (как тоже возможно сложенного тетраэдрами)?

Начнем с последнего. По формулам из справочников получаем, что при одном размере ребра объем 20-ти тетраэдров больше объема икосаэдра в ~1,08 раз (на ~8%). И каждый из 20-ти одинаковых внутренних в икосаэдре «квази-тетраэдриков» меньше настоящего тетраэдра по объему (на одном внешнем ребре) в ~1,08 раза. То есть внутренние в икосаэдре «ребра квази-тетраэдриков» стали меньше, «упаковались». А какими они стали? Все внутренние вершины этих внутренних тел икосаэдра сходятся в одну точку в центре икосаэдра; и внутренние ребра можно посчитать по основному поперечному сечению (см. рисунки Главы_13). По нему подсчитываем, что при единичном ребре внутренние «квази-ребрышки» равны «$\tau/2\varphi_1 \approx 0{,}951\ldots$». И то есть оно равно ребру пирамиды «Золотой спирали» (пирамиды Хеопса) на единичном основании. Интересно…

А какие же выводы можно сделать из анализа объема икосаэдра? Известен такой принцип: «*система – меньше суммы ее элементов*». Известен такой физический феномен, как «дефект масс», когда масса ядра атома меньше массы составляющих его нуклонов. Подобное происходит и при образовании других систем:

1. на уровне частиц, когда вес частицы меньше суммарного веса частиц, ее составляющих, на величину выделившейся энергии,
2. на уровне молекул и макромолекул,
3. на уровне кластеров (групп) молекул.

В этом смысле (но по объему, который в геометрии можно считать аналогом массы) икосаэдр – это действительно «системное тело», «упакованное» из элементов-тетраэдров.

А что же наш «10-гранник»? А с ним, кратко, получается следующее (см. рисунок и не забудьте, что там ребро 10-гранника равно «2»):

$$a=\frac{\varphi_2}{\tau}\approx 1{,}37638\ \ldots \qquad h=\frac{2\varphi_1}{\tau}\approx 1{,}05146\ \ldots$$

То есть внутреннее вертикальное квази-ребро ***больше*** реального на ~5%. Подобный же вывод о составленности 10-гранника тетраэдрами можно получить суммированием 5 внутренних углов тетраэдра по кругу: 5×70,53≈352,65°. То есть 5 составленных по кругу тетраэдров образуют щель в ~7,35°.

Какие можно сделать здесь выводы о «системности» 10-гранника. По его объему получается: $\boldsymbol{V_{10\text{-}гр.} > 5\times V_{тетр.}}$. Этот 10-гранник не является «системным телом». В отличие от икосаэдра.

Тема этого пункта – тема «системности» одного из правильных тел, – вообщем-то исчерпана. Но пройдем чуть дальше.

Не все так безнадежно с подобными 10-гранными телами. Здесь есть интересное продолжение. Давайте посмотрим, какое образуется тело, если будут равны высота внутреннего квази-ребра (высота тела) и длина реальных ребер, располагающихся по периметру. Очевидно, что ребра, идущие к вершинам, становятся меньше, и грани становятся равнобедренными треугольниками. На поперечном сечении углы становятся равны: $\alpha=36°$, $\beta=arctg(sin36°)\approx30{,}45°$. В этом теле мы получили в углах некоторую «линию качания»: $\boldsymbol{sin\alpha = tg\beta = \tau/2}$. Вот формула этой линии качания:

$$tg\alpha_i=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\varphi_2}{\tau}\right)^2+i-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2\varphi_1}{2-\varphi_1}+i}}=\frac{\tau}{\sqrt{\varphi_2{}^2+(i-1)\cdot\tau^2}}$$

В ней: $\alpha_0\approx46{,}6°$, $\alpha_1=36°$, $\alpha_2\approx30{,}45°$.

Кстати, вид, подобный 3-ему виду формулы для этой линии углов, имеется и у линии углов «Золотой спирали». Вот она:

$$tg\alpha_i=\frac{1}{\sqrt{\varphi_1+i}}=\frac{\varphi_1}{\sqrt{\tau^2+(i-3)\cdot\varphi_1{}^2}}$$

В подобной форме формулы линейки углов как бы указывается на некий особенный угол этой линейки. Отнимаемое от «*i*» число и указывает номер этого угла…

Но вернемся ко второму 10-граннику. Чтобы отличать его от первого, назовем «декаэдрон». Его объем меньше объема 5-ти тетраэдров, «составляющих» его, и тем самым он является «системным телом». В продолжение этого интересным является качество граней внутренних составляющих 4-х-гранников. Все эти грани оказываются равны, ими являются равнобедренные треугольники с $2\beta\approx 2\times30{,}45°$ и «бедрами»=$\sqrt{6-\varphi_1}/2\tau$. А у первого несистемного «10-гранника» равны попарно 2 грани квази-внутреннего 4-х-гранника.

Приведем сводную таблицу по «родственным» телам. И посмотрим «степень родства».

	Тетраэдр	Икосаэдр	«Декаэдрон»	«10-гранник»
Объем	$\frac{1}{6\cdot\sqrt{2}}\cdot a^3$	$\frac{5}{6}\cdot\varphi_2{}^2\cdot a^3$	$\frac{5}{6}\cdot\frac{\varphi_2}{2\tau}\cdot a^3$	$\frac{1}{6\cdot\tau^2}\cdot a^3$
Боковая поверхность	$\sqrt{3}\cdot a^2$	$5\cdot\sqrt{3}\cdot a^2$	$5\cdot\frac{1}{\tau}\cdot a^2$	$5\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a^2$

А другие правильные тела, они тоже – «системные»? Да. Кроме додекаэдра. Сумма объемов его 12-ти «внутренних» 5-гранных пирамид более чем в 2 раза меньше (3,618:7,663) объема додекаэдра… «Не от мира сего.» И поручил то Платон ему отвечать не за «перво-элементы», а за Вселенную.

Ну, да ладно. А каковы все же соотношения объемов правильных тел и их «внутренних равнорёберных пирамид»? У тетраэдра – 4, у октаэдра – 2, у куба – √2, у икосаэдра, как помним, ~ 1,08. В этой же последовательности выстраиваются соотношения объемов правильных тел и их описанных сфер: 8,16 – 3,14 – 2,72 – 1,65 . Додекаэдр же оказывается ближе всех к описанной сфере – 1,5 . А вот в отношениях с вписанными сферами последовательность меняется, за тетраэдром меняются местами куб и октаэдр, додекаэдр и икосаэдр, становясь именно в таком порядке: 3,31 – 1,91 – 1,65 –1,32 – 1,21 .

И стремятся все эти ряды к «1», к идеальному правильному телу, к сфере.

Приведем напоследок, как всегда, интересные (или полезные) «фактики»:

$$\cos 18^\circ = \frac{\tau}{2\varphi_1} \qquad R_{Оп.Икосаэдра} = \frac{\tau}{2\varphi_1}\cdot a \qquad \left(\frac{B}{H}\right)_{5-уг} = \frac{2\varphi_1}{\tau} \qquad \frac{2\varphi_1}{\tau} = 2\cdot tgB_3$$

Напомним эту величину из коллекции трансцендентного квадрата:

$$\frac{R}{a-R} = \frac{\varphi_1}{"0,363..."} = \frac{2}{\tau} = 1,701301616704...,$$ где R - радиус ВО-окружности.